1. सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए। [MODEL PAPER] [2020-21]

(क) मान लीजिए कि $f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलन है $f: R \to R$ है। सही उत्तर चुनिए।

(i) f एकैकी आच्छादक है।

(ii) f बहुएक आच्छादक है।

(iii) f एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है।

(iv) f न तो एकैकी है और न ही आच्छादक है।

हल:– दिया है, $f(x) = 3x$

माना $x_1, x_2 \in R$ इस प्रकार है कि –

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$3x_1 = 3x_2$$
$$x_1 = x_2$$

अत: $f(x)$ एकैकी फलन है।

पुन: दिया है, $f: R \to R$ तथा $f(x) = 3x$

माना प्रान्त x का सहप्रान्त y है

$$y = 3x$$
$$x = \frac{y}{3} \in R, \forall x \in R$$

∴ अत: $f(x)$ आच्छादक फलन है।

अत: $f(x)$ एकैकी आच्छादक है।

उत्तर (i) (✓)

(ख) यदि समुच्चय N में $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R है। निम्न में से सही उत्तर चुनिए।

(i) $(2, 4) \in R$ (ii) $(3, 8) \in R$

(iii) $(6, 8) \in R$ (iv) $(8, 7) \in R$

हल: दिया है, समुच्चय N में,

$R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$ एक सम्बन्ध है।

यहाँ, $b > 6$ अर्थात, 7, 8, 9

यदि $b = 8$, तब $a = 8 - 2 = 6$

अर्थात $(a, b) = (6, 8) \in R$

उत्तर : (iii) ✓

(ग) समाकलन $\int xe^x$ का मान ज्ञात कीजिए।

(i) e^x (ii) $(x+1)e^x$

(iii) $(x-1)e^x$ (iv) $\frac{x^2}{2}e^x$

हल: $\int \underset{I}{x}\,\underset{II}{e^x} = x\int e^x\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}x \int e^x\,dx\right]dx$

$= xe^x - \int 1 \cdot e^x\,dx$

$= xe^x - e^x$

$= e^x(x-1)$

उत्तर:- (iii) (✓)

(घ) अवकल समीकरण $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+y=0$ की कोटि है –

(i) 2 (ii) 1 (iii) 0 (iv) परिभाषित नहीं है

हल स्पष्ट है कि अवकल समी० –

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+y=0 \text{ की कोटि } 2 \text{ है।}$$

(ङ) यदि सदिश $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ और $\hat{i}-4\hat{j}+\lambda\hat{k}$ परस्पर लम्ब है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

(i) 3 (ii) 2 (iii) 4 (iv) 0

माना, $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-4\hat{j}+\lambda\hat{k}$

$\because$ दोनों सदिश परस्पर लम्ब है, तब $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$(2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\cdot(\hat{i}-4\hat{j}+\lambda\hat{k})=0$$

$$2-4+\lambda=0$$

$$\boxed{\lambda=2}$$

उत्तर (ii) 2

2. सभी खण्ड कीजिए।

(क) $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

$\cot^{-1}x$ का परिसर $(0,\pi)$ है। अतः इसका मुख्य मान इस अन्तराल के अन्तर्गत होगा।

माना $\cot^{-1}\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]=\theta$

$$\pi-\cot^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right]=\theta$$

$$\pi-\frac{\pi}{3}=\theta$$

$$\boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$$

(ख) दिखाइए कि फलन $f(x) = |x|$, $x = 0$ पर सतत है।

हल:- दिया है, $f(x) = |x|$

$x = 0$ पर

वाम पक्ष सीमा $= \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$

$$= \lim_{h \to 0} [|0-h|]$$

$$= \lim_{h \to 0} h$$

$$= 0$$

दक्षिण पक्ष सीमा $= \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} (0+h)$

$$= \lim_{h \to 0} [|0+h|]$$

$$= \lim_{h \to 0} h$$

$$= 0$$

तथा $f(0) = |0| = 0$

अत: $x = 0$ पर, वाम पक्ष सीमा = दक्षिण पक्ष सीमा = $f(0)$

अत: $x = 0$ पर फलन सतत है।

(ग) अवकल समी० $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$ की कोटि एवं घात बताइए।

हल: अवकल समी० $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$ की कोटि 2 एव घात 1 है।

(घ) व्यवरोधों $x+y \leq 4$; $x \geq 0, y \geq 0$ के अन्तर्गत $Z = 3x+4y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

दिया है, $Z = 3x+4y$ ---- (1)

$x+y \leq 4$ ---- (2)

$x, y \geq 0$ ---- (3)

दिए गए व्यवरोधों को समी० रूप में लिखने पर -

$x+y = 4$ ---- (4)

$x = y = 0$ ---- (5)

समी (4) के लिए सारणी

x	0	4
y	4	0

इसी प्रकार कोनीय बिन्दु (0,4) तथा (4,0) होंगे।

बिन्दु (0,4) पर, $Z = 3(0) + 4(4) = 16$ अधिकतम

बिन्दु (4,0) पर, $Z = 3(4) + 4(0) = 12$

अत Z का अधिकतम मान 16 है।

(ङ) यदि $P(A)=\frac{7}{13}$, $P(B)=\frac{9}{13}$ और $P(A\cap B)=\frac{4}{13}$, तो $P(A/B)$ का मान कीजिए।

हल: दिया है - $P(A)=\frac{7}{13}$, $P(B)=\frac{9}{13}$ तथा, $P(A\cap B)=\frac{4}{13}$

$$P\left[\frac{A}{B}\right]=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{4/13}{9/13}=\frac{4}{9}$$

3. सभी खण्ड कीजिए।

(क) यदि $f(x)=|x|$ तथा $g(x)=|5x-2|$ है तो gof तथा fog के मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है, $f(x)=|x|$ तथा $g(x)=5x-2$

$$gof=g\{f(x)\}=g\{|x|\}=|5x-2|$$
$$fog=f\{g(x)\}=f\{|5x-2|\}$$
$$=|5x-2|$$

(ख) यदि $y=A\sin x+B\cos x$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$

दिया है, $y=A\sin x+B\cos x$ ——(i)

समी.(i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर -

$$\frac{dy}{dx}=A\cos x+(-B\sin x) \longrightarrow (ii)$$

समी.(ii) का पुनः समाकलन करने पर -

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-A\sin x-B\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-(A\sin x+B\cos x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0}$$

इति सिद्धम्

(ग) सदिश $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच कोण ज्ञात कीजिए।

हल: माना $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

तथा इनके बीच का कोण θ है, तब -

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})\cdot(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{(1) + (-2)^2 + (3)^2}\sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (1)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{3+4+3}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{5}{7}\right]$$

(घ) गणित के एक प्रश्न-पत्र को तीन विद्यार्थी A, B, C को हल करने के लिए दिया जाता है जिनके द्वारा किए जाने की सम्भावनाएँ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ हैं, तो प्रश्न को हल किए जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

A द्वारा प्रश्न-पत्र हल करने की प्रायिकता, $P(A) = \frac{1}{2}$

B द्वारा प्रश्न-पत्र हल करने की प्रायिकता, $P(B) = \frac{1}{3}$

C द्वारा प्रश्न-पत्र हल करने की प्रायिकता, $P(C) = \frac{1}{4}$

∴ प्रश्न-पत्र हल किए जाने की प्रायिकता

= 1 − तीनों में से किसी के द्वारा प्रश्न पत्र हल न किए जाने की प्रायिकता।

$= 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)][1 - P(C)]$

$= 1 - \left[1 - \frac{1}{2}\right]\left[1 - \frac{1}{3}\right]\left[1 - \frac{1}{4}\right]$

$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$= \frac{3}{4}$ Ans

4. सभी खण्ड कीजिए :-

(क) फलन $f(x) = x^2 + 2x - 8$, $x \in [-4, 2]$ के लिए रोले की प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

(Deleted)
इस बार EXAM में नहीं है।

(ख) सदिश $(\vec{a}+\vec{b})$ और $(\vec{a}-\vec{b})$ में से प्रत्येक के लम्बवत् मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ है।

दिया है, $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

$$\therefore \vec{a}+\vec{b} = (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})+(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$$
$$= 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$$

$$\vec{a}-\vec{b} = (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})-(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$$
$$= -\hat{j}-2\hat{k}$$

माना $(\vec{a}+\vec{b})$ तथा $(\vec{a}-\vec{b})$ में प्रत्येक के लम्बवत सदिश $\vec{c}$ है।

$$\vec{c} = (\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-b) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{c} = \hat{i}[-6-(-4)] - \hat{j}(-4-0) + k(-2-0)$$
$$= \hat{i}(-2) - \hat{j}(-4) + k(-2)$$
$$= -2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$$

अतः अभीष्ट मात्रक सदिश —

$$\hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{-2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{4+16+4}}$$
$$= \frac{-2(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{24}} = \frac{-1}{\sqrt{6}}(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$$

(ग) उस समान्तर-चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी संलग्न भुजाएँ —

$\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ द्वारा दी गई है।

हल: दिया है, $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(1+4) - \hat{j}(3-4) + k(-3-1)$$

$$= -5\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{25+1+16}$$

$$= \sqrt{42}$$

समान्तर चतुर्भुज का क्षे० $= |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{42}$ वर्ग इकाई

(घ) A और B ऐसी घटनाएँ दी गई हैं, जहाँ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ तथा $P(B) = P$, तब P का मान ज्ञात कीजिए, यदि घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं।

दिया है — $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ तथा $P(B) = P$

$\because$ A व B परस्पर अपवर्जी हैं।

$\therefore$ $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$

$$\frac{1}{2} + P = \frac{3}{5} \Rightarrow P = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}$$

5. किन्ही पाँच खण्ड को कीजिए।

(क) सिद्ध कीजिए कि $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$

बायाँ पक्ष लेने पर –

$$= \sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17}$$

$[\sin^{-1}x - \sin^{-1}y = \sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}]$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{3}{5}\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2} - \frac{8}{17}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{3}{5}\sqrt{\frac{225}{289}} - \frac{8}{17}\sqrt{\frac{16}{25}}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{3}{5}\times\frac{15}{17} - \frac{8}{17}\times\frac{4}{5}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{9}{17} - \frac{32}{85}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{45-32}{85}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{13}{85}\right]$$

$$= \cos^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{13}{85}\right)^2}$$

$$= \cos^{-1}\sqrt{\frac{7225-169}{7225}}$$

$$= \cos^{-1}\sqrt{\frac{7056}{7225}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{84}{85}$$ इति सिद्धम्

ख) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

बायाँ पक्ष - $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

$R_1 \rightarrow R_1 - (R_1 + R_2)$

$= \begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

R_1 से 2 उभयनिष्ठ लेने पर -

$= 2\begin{vmatrix} 0 & -c & -b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

$R_2 \rightarrow R_2 + R_1$ तथा $R_3 \rightarrow R_3 + R_1$

$= 2\begin{vmatrix} 0 & -c & -b \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{vmatrix}$

प्रथम पंक्ति में विस्तार करने पर -

$= 2[0 + c(ab-0) - b(0-ac)]$

$= 2[0 + abc + abc]$

$= 2[2abc]$

$= 4abc$ इति सिद्धम्

ग $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए

[गुण 8 से $\int_{-a}^{a} f(x) = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$, यदि $f(x)$ एक सम फलन है]

$$= 2\int_{0}^{\pi/4} \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx \qquad [\cos 2x = 1-2\sin^2 x]$$

$$= \int_{0}^{\pi/4} (1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{\pi/4} 1\,dx - \int_{0}^{\pi/4} \cos 2x\,dx$$

$$= [x]_{0}^{\pi/4} - \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_{0}^{\pi/4}$$

$$= \left[\frac{\pi}{4} - 0\right] - \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[1-0]$$

$$= \frac{\pi-2}{4}$$

(घ) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ और

$\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + u(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के बीच

की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: दी गई रेखाएँ निम्न है -

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) \longrightarrow (1)$$

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + u(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) \longrightarrow (2)$$

समी ① व ② की तुलना क्रमशः

$$\vec{r} = \vec{a_1} + t\,\vec{b_1}$$
$$\vec{r} = \vec{a_2} + t\,\vec{b_2}$$ से करने पर -

$\vec{a_1} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{b_1} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$

$\vec{a_2} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, $\vec{b_2} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$

$$\vec{a_2} - \vec{a_1} = (3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k})$$
$$= 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

∵ $\vec{b_1}$ तथा $\vec{b_2}$ समान है, अतः दी गई रेखाएँ समान्तर हैं

$$\therefore \vec{b_1} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1}) = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) \times (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-3-6) - \hat{j}(-2-12) + \hat{k}(2-6)$$
$$= -9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}$$

∴ दोनों रेखाओं के बीच की दूरी $= \left| \dfrac{|\vec{b_1} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1})|}{|\vec{b_1}|} \right|$

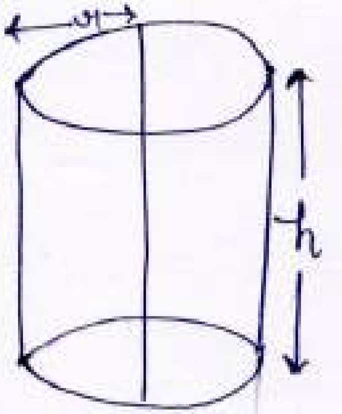
$$= \left| \frac{-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}}{2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}} \right|$$

$$= \frac{\sqrt{81 + 196 + 16}}{\sqrt{4 + 9 + 36}}$$

$$= \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}\sqrt{293}$$ इकाई

(उ.) सिद्ध कीजिए कि प्रदत्त पृष्ठ एवं महत्तम आयतन के बेलन की ऊँचाई, आधार के व्यास के बराबर होती है।

मान लीजिए कि r और h बेलन की त्रिज्या और ऊँचाई है-



तब, बेलन का पृष्ठ क्षेत्रफल,

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$2\pi r h = S - 2\pi r^2$$

$$h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} \longrightarrow (1)$$

$$V = \pi r^2 h \longrightarrow (2)$$

समी० (1) से h का मान समी० (ii) में रखने पर-

$$V = \pi r^2 \left[\frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}\right]$$

$$V = \frac{Sr}{2} - \pi r^3 \longrightarrow (3)$$

r के सापेक्ष समी० (3) का अवकलन करने पर-

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$$

अब उच्चतम और निम्नतम मान के लिए $\frac{dV}{dx} = 0$ रखने पर-

$$\frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0$$

$$S = 6\pi r^2$$

$$r^2 = \frac{S}{6\pi} \longrightarrow (4)$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} = -6\pi r$$

$$h = \frac{6\pi r^2}{2\pi}\left[\frac{1}{r}\right] - r$$

$$h = 3r - r = 2r$$

∴ जब ऊँचाई आधार के व्यास के बराबर होगी, तो आयतन उच्चतम होगा।

(घ) $(\sin x)^{\cos x}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

माना $y = (\sin x)^{\cos x}$

दोनों पक्षों का log लेने पर -

$$\log y = \log(\sin x)^{\cos x}$$

$$\log y = \cos x \log \sin x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर -

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x \cdot \frac{d}{dx}\log \sin x + \log \sin x \cdot \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \log \sin x(-\sin x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \log \sin x\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \log \sin x\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\cos x}\left[\cot x \sin x - \sin x \log \sin x\right]$$

6. किन्हीं पाँच खण्ड को हल कीजिए।

(क) दिखाइए कि $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$, $x = 0$ पर असतत है।

हल दिया है, $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर,

$$\text{दक्षिण पक्ष सीमा} = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0+h|}{0+h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\text{वाम पक्ष सीमा} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0^-} f(0-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0-h|}{0-h} = -1$$

$x = 0$ पर फलन $f(0) = \frac{|0|}{0} = 0$

$\because$ वाम पक्षसीमा $\neq$ दक्षिण पक्षसीमा

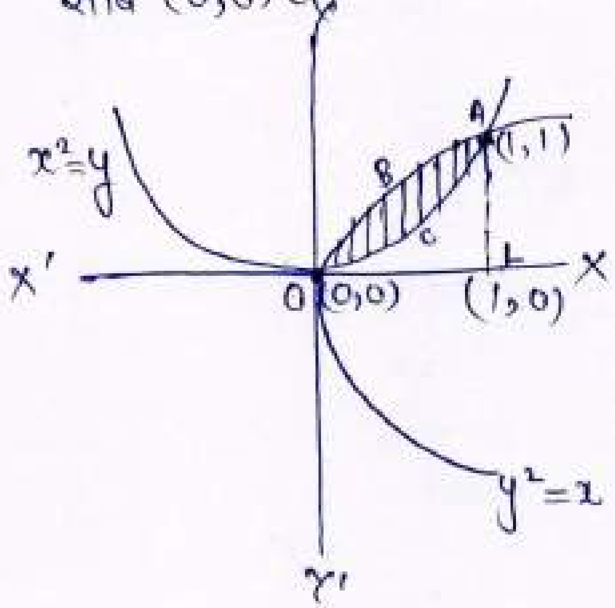
अतः दिया गया फलन $x = 0$ पर असतत है।

(ख) दो परवलयों $y=x^2$ और $y^2=x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :- दिए गए दोनों परवलयों के समीकरण निम्न हैं-

$$x^2=y \longrightarrow (1)$$
$$y^2=x \longrightarrow (2)$$

उपरोक्त दोनों समीकरण परवलयों को निरूपित करते हैं जिनके शीर्ष $(0,0)$ हैं।



चित्र में, छायांकित भाग घिरे हुए क्षेत्र को दर्शाता है।

समी (1) तथा (2) से -

$$(y^2)^2=y$$
$$y^4-y=0$$
$$y(y^3-1)=0$$
$$y=0$$
$$y^3=1$$
$$y=1$$

जब $y=0$ तब $x=0$

$y=1$ तब $x=1$

अभीष्ट क्षेत्रफल = OLABO का क्षे॰ − OLACO का क्षे॰

$$= \int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x^2\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}[1-0] - \frac{1}{3}[1-0]$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$ वर्ग इकाई

(ग) समतल $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 6$ और $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}) = -5$ के प्रतिच्छेदन तथा बिन्दु (1, 1, 1) से जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

दिए गए समतलों के समी॰ निम्न है —

$$\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 6$$
$$\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}) = -5$$

$$[\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) - 6] + \lambda[\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}) + 5] = 0$$

$$\vec{r}\cdot[(1+2\lambda)\hat{i} + (1+3\lambda)\hat{j} + (1+4\lambda)\hat{k}] - 6 + 5\lambda = 0 \longrightarrow (1)$$

प्रश्नानुसार समतल (i) बिन्दु (1, 1, 1) अर्थात $\vec{r} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ से होकर जाता है, इसलिए यह बिन्दु समी (1) को सन्तुष्ट करेगा।

$$\therefore (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\cdot[(1+2\lambda)\hat{i} + (1+3\lambda)\hat{j} + (1+4\lambda)\hat{k}] - 6 + 5\lambda = 0$$

$$1+2\lambda+1+3\lambda+1+4\lambda-6+5\lambda = 0$$

$$14\lambda = 3$$

$$\lambda = \frac{3}{14}$$

समी. (1) में $\lambda = \frac{3}{14}$ रखने पर —

समी ① में t का मान रखने पर –

$$\vec{r}\left[\left(1+\frac{6}{14}\right)\hat{i}+\left(1+\frac{9}{14}\right)\hat{j}+\left(1+\frac{12}{14}\right)\hat{k}\right]-6+\frac{15}{14}=0$$

$$\vec{r}\left[20\hat{i}+23\hat{j}+26\hat{k}\right]=69$$

(घ) निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत $z=3x+2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए।
$x+y\geq 8,\ 3x+5y\leq 15,\ x\geq 0,\ y\geq 0$

दिया है: उद्देश्य फलन $z=3x+2y \longrightarrow$ ①

का न्यूनतम मान निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत ज्ञात करना है –

$x+y\geq 8 \longrightarrow$ ②

$3x+5y\leq 15 \longrightarrow$ ③

$x\geq 0,\ y\geq 0 \longrightarrow$ ④

व्यवरोधों को समी० के रूप में लिखने पर –

$x+y=8 \longrightarrow$ ⑤

$3x+5y=15 \longrightarrow$ ⑥

$x=0,\ y=0 \longrightarrow$ ⑦

समी ⑤ के लिए सारणी निम्न है –

x	0	8
y	8	0

∴ रेखा $x+y=8$ बिन्दुओं $A(0,8)$ तथा $(8,0)$ से होकर जाती है।

समी (vi) के लिए सारणी निम्न है –

x	0	5
y	3	0

रेखा $3x+5y=15$, बिन्दुओं $C(0,3)$ तथा $D(0,5)$ से होकर जाता है।

अभी (v) तथा (vi) का प्रतिच्छेदन बिन्दु $E\left[\frac{25}{2}, \frac{9}{2}\right]$

असमिका (ii) में $x=0$, $y=0$ रखने पर

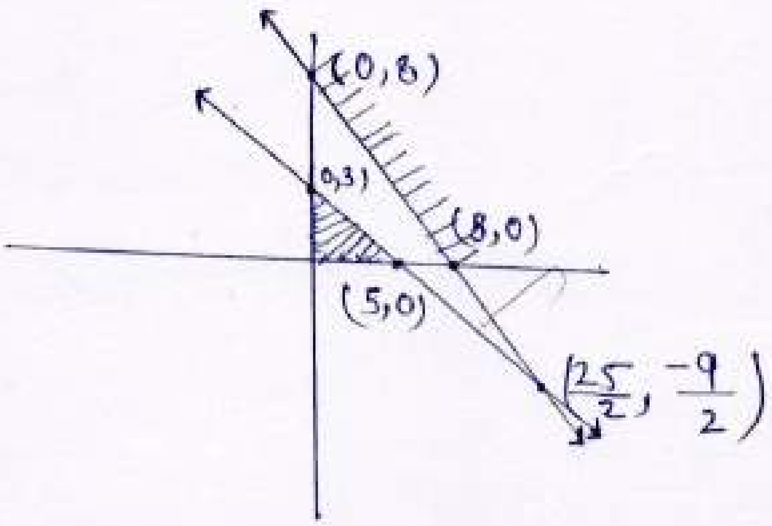
$0 \geq 8$

अतः अर्द्धतल मूल बिन्दु के विपरीत होगा।

असमिका (iii) में $x=0$, $y=0$ रखने पर

$0 \leq 15$

अतः अर्द्धतल मूलबिन्दु की ओर होगा।



अब, उपरोक्त समी० का आलेख खींचने पर सुसंगत क्षेत्र प्राप्त नहीं होता है इसलिए इसका न्यूनतम मान ज्ञात नहीं किया जा सकता है।

(3०) वक्र $x^2+y^2-2x-3=0$ के उन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ पर वे x-अक्ष के समान्तर हैं।

हल दिए गए वक्र का समी० निम्न है —

$$x^2+y^2-2x-3=0 \quad \text{———} (i)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर -

$$2x+2y\frac{dy}{dx}-2=0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2-2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(1-x)}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x)}{y}$$

यदि स्पर्श रेखा x - अक्ष के समान्तर है, तब

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1-x}{y} = 0$$

$$1-x = 0$$

$$x = 1$$

$x=1$ समी०(1) में रखने पर,

$$(1)^2 + y^2 - 2\times1 - 3 = 0$$

$$y^2 - 4 = 0$$

$$y^2 = -4$$

$$y = \pm 2$$

अतः वे बिन्दु, जहाँ पर स्पर्श रेखा X-अक्ष के समान्तर है, (1, 2) और (1, -2) है।

∴ स्पर्श रेखा का समीकरण निम्न है

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1, y_1} (x - x_1)$$

∴ बिन्दु (1, 2) पर, स्पर्श रेखा का समी० -

$$y - 2 = 0(x-1)$$

$$\boxed{y - 2 = 0}$$

बिन्दु (1, −2) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता −

$$y-(-2) = 0(x-1)$$

$$\boxed{y+2 = 0}$$

(च) एक छात्रावास में 60% विद्यार्थी हिन्दी के, 40% अंग्रेजी के और 20% दोनो अखबार पढते हैं।

(i) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह न तो हिन्दी और न ही अंग्रेजी का अखबार पढ़ते हैं।

(ii) यदि वह हिन्दी का अखबार पढ़ते हैं, तो उनके अंग्रेजी का अखबार ~~ब~~ भी पढ़ने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

मान लीजिए घटना H 'हिन्दी अखबार पढ़ने वाले विद्यार्थियों का समूह है, तथा घटना E 'अंग्रेजी अखबार पढ़ने वाले विद्यार्थियों का समूह है।

मान लीजिए $n(S) = 100$, तब

$$n(H) = 60$$

$$n(E) = 40$$

$$n(H \cap E) = 20$$

$$P(H) = \frac{n(H)}{n(S)} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

$$P(H \cap E) = \frac{n(H \cap E)}{n(S)} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

(i) अभीष्ट प्रायिकता = P(विद्यार्थी न तो हिन्दी और न ही अंग्रेजी का अखबार पढते हैं)

$$= P(H' \cap E') = P(H \cup E)'$$

$$= 1 - P(H \cup E)$$

$$= 1 - [P(H) + P(E) - P(H \cap E)]$$

$$= 1 - \left[\frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right] = \frac{1}{5}$$

(ii) अभीष्ट प्रायिकता := P (यदि वह हिन्दी का अखबार पढता हो, तो उससे अँग्रेजी का अखबार भी पढ़ने वाला होना चाहिए।)

$$P\left[\frac{E}{H}\right] = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{1/5}{3/5} = \frac{1}{3}$$

Q-7 निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए।

(क) यदि $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो

$(AB)^{-1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ तथा

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3-0) - 2(-1-0) - 2(2-0)$$

$$= 3+2-4 = 1$$

B के प्रथम पंक्ति के सहगुणनखण्ड

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (3-0) = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-0) = 1$$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (2-0) = 2$

B के द्वितीय पंक्ति के सहगुणनखण्ड –

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(2-(4) = +2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-0) = 1$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-0) = 2$

B के तृतीय पंक्ति के सहगुणनखण्ड

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0+6 = 6$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3-(-2) = 5$

B का सहगुणनखण्ड आव्यूह –

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

B का सहखण्डज (या adj B) = C का परिवर्त $= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{adj(B)}{|B|} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad [\because |B| = 1]$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (9-30+30) & (-3+12-12) & (3-10+12) \\ (3-15+10) & (-1+6-4) & (1-5+4) \\ (6-30+25) & (-2+12-10) & (2-10+10) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ & & \end{bmatrix}$$

(ख) समी० निकाय $3x-2y+3z=8$, $2x+y-z=1$, $4x-3y+2z=4$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

<u>हल:</u> दिया गया समी० निकाय का आव्यूह रूप निम्न प्रकार है—

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3(2-3) + 2(4-(-4)) + 3(-6-4)$$

$$= -3 + 16 - 30$$

$$= -17 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

$$X = A^{-1}B$$

A के प्रथम पंक्ति के सहगुणनखण्ड

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2-(3) = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(4-(-4)) = -8$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6-4 = -10$$

A के द्वितीय पंक्ति के सहगुणनखण्ड

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -[-4-(-9)]$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6-12 = -6$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -[-9-(-8)]$$

$$= -[-1] = 1$$

A के तृतीय पंक्ति के सहगुणनखण्ड

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2-3 = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-3-6) = 9$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3+4 = 7$$

A का सहगुणखण्ड आव्यूह $C = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ -5 & -6 & 1 \\ -1 & 9 & 7 \end{bmatrix}$

A का सहखण्डज आव्यूह (या adj A) = C का परिवर्त =

$$\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adj A}{|A|} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

अब समी० ① से, $X = A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{-1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{-1}{17}\begin{bmatrix} (-8-5-4) \\ (-64-6+36) \\ (-80+1+28) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{-1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

तुलना करने पर

$x = 1,\ y = 2,\ z = 3$

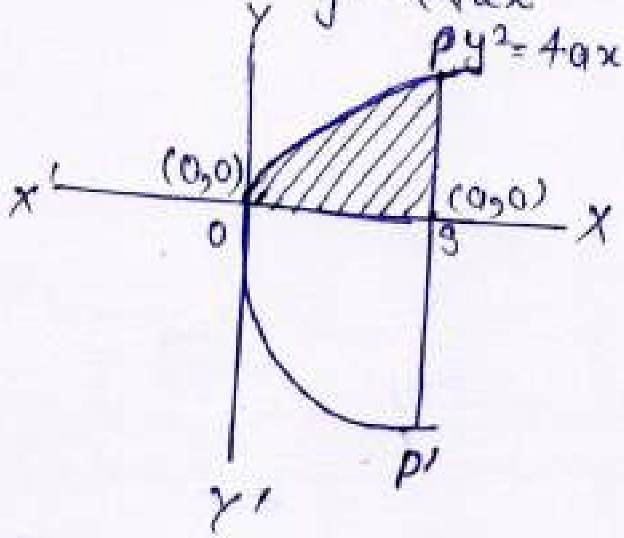
8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए।

(क) परवलय $y^2 = 4ax$ और उसके नाभिलंब से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: दिए गए परवलय का समीकरण, $y^2 = 4ax$

$$y = \sqrt{4ax}$$

$$y = 2\sqrt{ax} \quad \text{—— (1)}$$



परवलय के नाभिलम्ब का समी० $x = a$

माना, नाभिलम्ब परवलय को बिन्दुओं P तथा P' पर काटता है।

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र PSP'OP का क्षेत्रफल

$$= 2 \times PSOP \quad [\because \text{ परवलय X-अक्ष के सापेक्ष सममित है}]$$

$$= 2\int_0^a y\,dx$$

$$= 2\int_0^a 2\sqrt{ax}\,dx$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{ax}\,dx$$

$$= 4a^{1/2}\int_0^a x^{1/2}\,dx$$

$$= 4a^{1/2}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^a$$

$$= 4a^{1/2}\frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^a$$

$$= 4a^{1/2}\frac{2}{3}\left[a^{3/2} - 0\right]$$

$$= 4\, a \cdot a^{1/2} a^{1/2}\, \frac{2}{3}$$

$$= \frac{8}{3}a^2 \text{ वर्ग इकाई}$$

(ख) अवकल समी० $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए

हलः दी गई अवकल समी० निम्न है -

$$\frac{dy}{dx} - y = \cos x$$

दी गई समी० एक रैखिक अवकल समी० है।
इसकी तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$P = -1, \text{ तथा } Q = \cos x$$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int -dx} = e^{-x}$$

अब अवकल समी० का हल -

$$y \cdot (IF) = \int Q(IF)\,dx + c$$

$$y e^{-x} = \int \cos x \cdot e^{-x} dx + c$$

$$y e^{-x} = I + c$$

$$I = \int \cos x \cdot e^{-x}\, dx$$

$$\Rightarrow \cos x \int e^{-x} - \int\left[\frac{d}{dx}\cos x \int e^{-x} dx\right] dx$$

$$\Rightarrow -e^{-x}\cos x - \int (-\sin x)(-e^{-x})\,dx$$

$$\Rightarrow -e^{-x}\cos x - \int \sin x\, e^{-x}\, dx$$

$$= -e^{-x}\cos x - \left[\sin x \int e^{-x} dx - \int \left[\frac{d}{dx}\sin x \int e^{-x} dx\right] dx\right.$$

$$= -e^{-x}\cos x - \left[-e^{-x}\sin x - \int \cos x\,(-e^{-x})\,dx\right.$$

$$= -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int \cos x\, e^{-x}\, dx$$

$$I = -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - I$$

$$2I = -e^{x}\cos x + e^{-x}\sin x$$

$$2I = e^{-x}[\sin x - \cos x]$$

$$I = \frac{e^{-x}(\sin x - \cos x)}{2}$$

समी (i) से –

$$y e^{-x} = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + c$$

e^{-x} से भाग करने पर –

$$y = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + ce^{x}$$

9. निम्नलिखित में से किसी खण्ड को हल कीजिए –

(क) $\int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx$

$$I = \int_0^{\pi/2} \log\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\} \longrightarrow (1)$$

$$\left[\text{गुण } \int_0^{a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(a-x)\,dx \text{ से}\right]$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \log \cos x\, dx \longrightarrow (2)$$

समी (1) व (2) को जोड़ने पर –

$$2I = \int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx + \log \cos x\, dx$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \log(\sin x \cdot \cos x)\, dx$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{2\sin x\cdot\cos x}{2}\right)dx \quad [\because \log m + \log n = \log mn]$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \log\frac{\sin 2x}{2}\,dx$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x\,dx - \int_0^{\pi/2} \log 2\,dx$$

$$\left[\because \log m - \log n = \log\frac{m}{n}\right]$$

माना $2x = t$

$2dx = dt$

$dx = \frac{1}{2}dt$

जब $x = \pi/2$ तब $t = \pi$

$x = 0$ तब $t = 0$

$$\therefore 2I = \int_0^{\pi} \log \sin t\,dt - \int_0^{\pi/2} \log 2\,dx$$

$$2I = \int_0^{\pi} \log \sin x\,dx - \int_0^{\pi/2} \log 2\,dx$$

$$\left[\because \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a f(x)\,dx\right]$$

$$2I = 2\int_0^{\pi/2} \log \sin x\,dx - \int_0^{\pi/2} \log 2\,dx$$

[$\because$ गुण $\int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$]

$$2I = I - \int_0^{\pi/2} \log 2\,dx$$

$$2I - I = -\log 2 \int_0^{\pi/2} dx$$

$$I = -\log 2\,[x]_0^{\pi/2}$$

$$I = -\log 2\left[\frac{\pi}{2} - x\right] = -\log 2\,\frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{2}\log 2$$

(ख) $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx \longrightarrow (1)$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{a^2\cos^2(\pi-x) + b^2\sin^2(\pi-x)}\,dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx \longrightarrow (2)$$

अभी (1) व (2) को जोड़ने पर -

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sec^2 x}{a^2 + b^2\tan^2 x} \quad (\cos^2 x \text{ से भाग करने पर})$$

$$\left[\because \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx \text{ यदि } f(2a-x) = f(x)\right]$$

$$2I = 2\pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x}{a^2 + b^2\tan^2 x}\,dx$$

माना $b\tan x = t$ अब $x = \frac{\pi}{2}$, तब $t = \infty$

$b\sec^2 x\,dx = dt$ $x = 0$, तब $t = 0$

$\sec^2 x\,dx = \frac{1}{b}dt$

$$I = \pi\int_0^{\infty} \frac{1}{a^2 + t^2}\,\frac{1}{b}\,dt$$

$$I = \frac{\pi}{b}\left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{t}{a}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0\right]$$

$$I = \frac{\pi}{ab}\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi^2}{2ab}$$