अनिश्चित समाकलन
(Indefinite Integration)

1. (i) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

(ii) $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \log_e x$

(iii) $\int e^x\,dx = e^x$

(iv) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\log_e a}$

(v) $\int \sin x\,dx = -\cos x$

(vi) $\int \cos x\,dx = \sin x$

(vii) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$

(viii) $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x$

(ix) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x$

(x) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x$

(xi) $\int \sec x\,dx = \log(\sec x + \tan x)$

(xii) $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \log \tan \dfrac{x}{2}$

(xiii) $\int \tan x\,dx = \log \sec x$

(xiv) $\int \cot x\,dx = \log \sin x$

(xv) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\dfrac{x}{a}$

(xvi) $\int \dfrac{1}{a^2+x^2}\,dx = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

(xvii) $\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

(xviii) $\int \dfrac{1}{x^2-a^2}\,dx = \dfrac{1}{2a}\log\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)$

(xix) $\int \dfrac{1}{a^2-x^2}\,dx = \dfrac{1}{2a}\log\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)$

(xx) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \log\{x+\sqrt{x^2-a^2}\}$

(xxi) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \log\{x+\sqrt{x^2+a^2}\}$

(xxii) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{1}{2}a^2\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

(xxiii) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \dfrac{1}{2}a^2\log(x+\sqrt{x^2-a^2})$

(xxiv) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{1}{2}a^2\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$

नोट :

- $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log\{f(x)\}$
- $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)}$

---

2. कुछ उचित प्रतिस्थापन

(Some Proper Substitution)

(i) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ x = a\sin\theta$ या $a\cos\theta$

(ii) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx,\ x = a\tan\theta$

(iii) $\int \sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\,dx,\ x^2 = a^2\cos 2\theta$

(iv) $\int \sqrt{a \pm x}\,dx,\ a \pm x = t^2$

(v) $\int \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\,dx,\ x = a\cos 2\theta$

(vi) $\int \dfrac{dx}{(px+q)\sqrt{ax+b}},\ ax+b = t^2$

(vii) $\int \dfrac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}},\ px+q = \dfrac{1}{t}$

(viii) $\int \dfrac{dx}{(px^2+qx+r)\sqrt{ax+b}},\ ax+b = t^2$

निश्चित समाकलन (Definite Integration)

1. $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

2. निश्चित समाकलन के प्रगुण (Properties of Definite Integration)

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

(ii) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

(iii) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, a < c < b$

(iv) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

(v) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

(vi) $\int_{-a}^a f(x) = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx & \text{यदि} f(-x) = f(x) \\ 0 & \text{यदि} f(-x) = -f(x) \end{cases}$

(vii) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx & \text{यदि} f(2a-x) = f(x) \\ 0 & \text{यदि} f(2a-x) = -f(x) \end{cases}$

3. यदि m व n धनपूर्णांक हो, तो

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\lceil m+1/2 . \lceil n+1/2}{2 . \lceil m+n+2/2}$$

जहाँ, $(\lceil n+1) = n\lceil n$, $\lceil 1 = 1$, $\lceil 1/2 = \sqrt{\pi}$

4. (i) $\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$

(ii) $\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$

(iii) $\int_0^\infty e^{-ax} x^n\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

5. लैबनीज नियम (Leibnitz's Rule) : यदि $f(x)$ सतत् व $u(x)$ व $v(x)$, $[a, b]$ में अवकलनीय है, तो

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f\{v(x)\}\frac{d}{dx}v(x) - f\{u(x)\}\frac{d}{dx}u(x)$$

6. $$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n-1} f\left(\frac{r}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx$$

6. $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{r=0}^{n-1} f\left(\frac{r}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx$

7. वक्र $y = f(x)$, x अक्ष तथा कोटियों $x = a, x = b$ से घिरा क्षेत्रफल $= \int_a^b y\,dx$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

अवकल समीकरण (Differential Equations)

1. स्वतन्त्र चर, परतन्त्र चर व परतन्त्र चर के किसी भी क्रम के अवकलन से युक्त समीकरण को अवकल समीकरण कहते हैं।

2. किसी अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम क्रम के अवकल गुणांक का क्रम उस अवकल समीकरण की कोटि को व्यक्त करता है।

3. किसी अवकल समीकरण में विद्यमान उच्चतम कोटि के अवकल गुणांक की धनात्मक घात को उस अवकल समीकरण की घात कहते हैं।

4. (i) अवकल समीकरण

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ का हल $y = \int f(x)\,dx + c$ है।

(ii) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$ का हल

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + c$ है।

(iii) समघातीय समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ को हल करने के लिए

$y = vx$ तथा $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखते हैं।

$\therefore$ इसका हल $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{f(v) - v} + c$ है।

(iv) रैखिक अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ का हल

$$y\,(\text{I.F.}) = \int Q\,(\text{I.F.})\,dx + c$$

जहाँ, I.F. (समाकलन गुणनखण्ड) $= e^{\int p\,dx}$ है।

5. **बरनौली समीकरण** (Bernoulli's Equation) $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ इस प्रकार की समीकरण बरनौली समीकरण कहलाती है।

$$\Rightarrow \quad y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{-(n-1)}P = Q$$

इसमें $y^{-(n-1)} = Y$ तथा $\frac{1-x}{y^n}\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx}$ रखने पर $\frac{dY}{dx} + (1-n)\,p\,Y = (1-n)\,Q$ हो जाती है। जिसका हल रैखिक समीकरण के हल की तरह ज्ञात किया जा सकता है।