2. कुछ महत्त्वपूर्ण सीमाएँ (Some Important Limits)

(i) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = n\, a^{n-1}$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) = 1$

(iii) (a) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$ $\Rightarrow e^{\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \frac{1}{x}}$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim\limits_{x \to 0} (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} \Rightarrow e^{\lim\limits_{x \to 0}}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} \Rightarrow e^{\lim\limits_{x \to \infty}}$

(iv) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x - 1}{x}\right) = \log a$

(v) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^n - 1}{x} = n$

(vi) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\log x}{x - 1} = 1$

(vii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} = 2$

(viii) (a) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

(ix) (a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (b) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

(x) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

(xi) $\lim_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{यदि} \quad a > 1 \\ 0 & \text{यदि} \quad a < 1 \end{cases}$

(xii) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} = 1$

(xiii) यदि $\lim_{x \to a} f(x) = l$ तब

(a) $\lim_{x \to a} \log \{f(x)\} = \log \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] = \log l$

(b) $\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x)} = e^l$

3. एल हॉस्पीटल का नियम (Rule of L' Hospital)

यदि $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ तथा $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ हो, तो

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f^n(x)}{g^n(x)}$$

नोट :

- *यदि फलन $\frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$ रूप का है, तभी एल-हॉस्पीटल के नियम का उपयोग किया जा सकता है।*

---

4. सीमा सम्बन्धी नियम (Rules Related to Limits)

(i) $\lim_{x \to a} \left[f(x) + k\right] = \lim_{x \to a} f(x) + k$

(ii) $\lim_{x \to a} k f(x) = k \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$

(iii) $\lim_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x)\right]$

$$= \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

(iv) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)]$

$$= \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] \left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$$

(v) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

अवकलन (Differentiation)

1. मानक फलनों के अवकलन (Differentiation of Standard Functions) :

(i) $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

(ii) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(iii) $\frac{d}{dx}a^x = a^x \log_e a$

(iv) $\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}$

(v) $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e$

(vi) $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

(vii) $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

(viii) $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

(ix) $\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$

(x) $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

(xi) $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$

(xii) $\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(xiii) $\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(xiv) $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$

(xv) $\frac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\frac{1}{1+x^2}$

(xvi) $\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(xvii) $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

2. विभिन्न फलनों का अवकलन (Differentiation of Various Functions) :

(i) $\frac{d}{dx}c = 0$

(ii) $\frac{d}{dx}cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$

(iii) $\frac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$

(iv) $\frac{d}{dx}\{f(x) . g(x)\}$

$$= g(x)\frac{d}{dx}f(x) . + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

(v) $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$

3. यदि $y = [f(x)]^{g(x)}$

तब

$$\frac{dy}{dx} = [f(x)]^{g(x)}\left[\frac{g(x)}{f(x)} \cdot \frac{d}{dx}f(x) + \log\{f(x)\}\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

4. यदि $x = \phi(t)$ तथा $y = \psi(t)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

5. यदि $u = f(x)$ तथा $v = g(x)$

तब $\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$

6. बिन्दु $P(x, y)$ पर स्पर्शी की प्रवणता

$$= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x,y)} = \tan\psi$$

नोट :

- *यदि स्पर्शी x-अक्ष के समान्तर है, तो*

$$\psi = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x, y)} = 0$$

- यदि स्पर्शी x-अक्ष के लम्बवत् है, तो

$$\psi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x, y)} = 0$$

7. बिन्दु $P(x, y)$ पर अभिलम्ब की प्रवणता

$$= -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x, y)}}$$

8. बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्शी का समीकरण

$$(y - y_1) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} (x - x_1)$$

9. बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब का समीकरण

$$(y - y_1) = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}} (x - x_1)$$

वर्द्धमान व ह्रासमान फलन
(Increasing and Decreasing Function)

1. पूर्णतः वर्द्धमान फलन
(Strictly Increasing Function)

अन्तराल (a, b) में फलन $f(x)$ पूर्णतः वर्द्धमान फलन होगा यदि

$$x_1 < x_2$$
$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \forall \; x_1, x_2 \in (a, b)$$

2. पूर्णतः ह्रासमान फलन
(Strictly Decreasing Function)

अन्तराल (a, b) में फलन $f(x)$ पूर्णतः ह्रासमान फलन होगा, यदि

$$x_1 < x_2$$
$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \forall \; x_1, x_2 \in (a, b)$$

3. एकदिष्ट फलन (Monotonic Function)

यदि कोई फलन किसी अन्तराल में वर्द्धमान फलन है या ह्रासमान फलन है, तब उस फलन को एकदिष्ट फलन (Monotonic Function) कहते हैं।

नोट :

- *यदि $f'(x) > 0, \forall \; x \in (a, b)$, तब $f(x)$ अन्तराल (a, b) में वर्द्धमान होगा।*
- *यदि $f'(x) < 0, \forall \; x \in (a, b)$ हो, तब $f(x)$ अन्तराल (a, b) में ह्रासमान होगा।*

---

4. एकदिष्ट फलन के गुण
(Properties of Monotonic Function)

(i) यदि अन्तराल $[a, b]$ में फलन $f(x)$ पूर्णतः वर्द्धमान फलन है, तो $f^{-1}(x)$ का अस्तित्व होगा तथा यह भी इस अन्तराल में पूर्णतः वर्द्धमान होगा।

(ii) यदि $f(x)$ अन्तराल $[a, b]$ में सतत् है तथा पूर्णतः वर्द्धमान है, तो f^{-1} अन्तराल $[f(a), f(b)]$ में सतत् होगा।

(iii) यदि $f(x), [a, b]$ में इस प्रकार सतत् है कि $f'(c) \geq 0, \forall \; c \in (a, b)$, तो फलन $f(x), [a, b]$ में एकदिष्ट वर्द्धमान होगा तथा यदि $f'(c) \leq 0, \forall \; c \in (a, b)$ हो, तो फलन $f(x)$ अन्तराल (a, b) में एकदिष्ट ह्रासमान होगा।

(iv) यदि $f(x)$ व $g(x), [a, b]$ में एकदिष्ट वर्द्धमान (या ह्रासमान) है, तो $gof(x), [a, b]$ में एकदिष्ट वर्द्धमान होगा।

(v) यदि $f(x)$ व $g(x)$ में से एक फलन वर्द्धमान तथा दूसरा ह्रासमान है, तो $gof(x), [a, b]$ में एकदिष्ट ह्रासमान होगा।

उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ
(Maxima and Minima)

उच्च अवकलन परीक्षण (Higher Order Derivative Test) :$f'(x)$ ज्ञात करके उसे 0 के बराबर रखते हैं। इस प्रकार मूल $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ प्राप्त होते हैं। अब $f''(x)$ ज्ञात करते हैं।

यदि $f''(a_1)$ धनात्मक है, तो फलन निम्निष्ठ है। यदि $f''(a_1)$ ऋणात्मक है, तो फलन उच्चिष्ठ है और यदि $f''(a_1) = 0$ हो, तो इस प्रक्रिया को आगे इसी प्रकार बढ़ाते हैं।