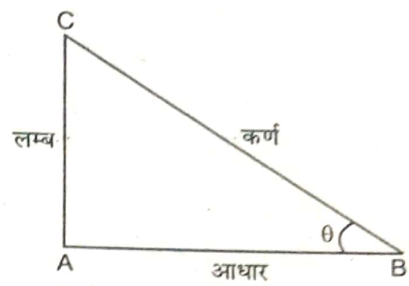


त्रिकोणमितीय फलन तथा अनुपात (Trigonometrical Function and Ratios)



$$(vii) (\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$$

1. कुछ मूल सूत्र (Some Basic Formulae)

$$(i) \sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \quad (ii) \cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$

$$(ii) \tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \quad (iv) \cot \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$$

$$(v) \sec \theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} \quad (vi) \text{cosec } \theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$$

2. कोणों को मापने की मुख्यतः तीन पद्धति सारणी द्वारा प्रदर्शित की गई है :

(a) अंग्रेजी पद्धति (साठ पर आधारित)	(b) फ्रेंच पद्धति (सौ पर आधारित)	(c) वृत्तीय पद्धति
इस पद्धति से कोणों को अंश में मापा जाता है। 1 समकोण = 90° 1° = 60' और 1' = 60''	इस पद्धति में कोणों को ग्रेड (g) में मापा जाता है। 1 समकोण = 100ᵍ 1ᵍ = 100' और 1' = 100''	इस पद्धति में कोणों को रेडियन में मापा जाता है। एक रेडियन वह कोण है जो किसी वृत्त की त्रिज्या के बराबर लम्बाई के चाप द्वारा उस वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित किया जाता है। 1 रेडियन को 1ᶜ के रूप में लिखा जाता है।

3. चाप व कोण में सम्बन्ध

(Relation Between an Arc and an Angle)

यदि किसी r त्रिज्या के वृत्तखण्ड के शीर्ष का कोण (रेडियन में) θ है, तब वृत्त के चाप की लम्बाई $l = r\theta$

नोट : π रेडियन = 180° = 200ᵍ = 2 समकोण

तथा 1 रेडियन = $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 57^\circ 16' (21.8)''$ (लगभग)

4. कुछ महत्वपूर्ण सूत्र (Some Important Formulae)

$$(i) \text{cosec } \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ या } \sin \theta = \frac{1}{\text{cosec } \theta}$$

$$(ii) \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ या } \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$$

$$(iii) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cot \theta}$$

$$(iv) \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$(v) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\text{या } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{ या } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$(vi) \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\text{या } \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1 \text{ या } \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$(vii) \text{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$\text{या } \text{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta \text{ या } \cot^2 \theta = \text{cosec}^2 \theta - 1$$

5. त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान

(Values of Trigonometric Ratios)

कोण θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot \theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec \theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\text{cosec } \theta$	∞	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

6. त्रिकोणमितीय फलनों का प्रान्त व परास
(Domain and Range of Trigonometric Functions)

त्रि० फलन	प्रान्त	परास
$\sin \theta$	R	$[-1, 1]$
$\cos \theta$	R	$[-1, 1]$
$\tan \theta$	$R - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in I \right\}$	$(-\infty, \infty) = R$
$\cot \theta$	$R - (n\pi, n \in I)$	$(-\infty, \infty) = R$
$\sec \theta$	$R - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in I \right\}$	$(\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\operatorname{cosec} \theta$	$R - \{n\pi; n \in I\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

8. सम्बन्धित कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात
(Trigonometrical Ratios for Related Angles)

	$\frac{\pi}{2} - \theta$	$\frac{\pi}{2} + \theta$	$\pi - \theta$	$\pi + \theta$	$\frac{3\pi}{2} - \theta$	$\frac{3\pi}{2} + \theta$	$2\pi - \theta$
$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$-\sin \theta$	$-\cos \theta$	$-\cos \theta$	$-\sin \theta$
$\cos \theta$	$\sin \theta$	$-\sin \theta$	$-\cos \theta$	$-\cos \theta$	$-\sin \theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$
$\tan \theta$	$\cot \theta$	$-\cot \theta$	$-\tan \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$-\cot \theta$	$-\tan \theta$
$\cot \theta$	$\tan \theta$	$-\tan \theta$	$-\cot \theta$	$\cot \theta$	$\tan \theta$	$-\tan \theta$	$-\cot \theta$

9. योग तथा अन्तर के लिए सूत्र

(Sum and Difference Formulae)

(i) $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(ii) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

(iii) $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

(iv) $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

(v) $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

(vi) $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

(vii) $\cot(A + B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$

(viii) $\cot(A - B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot A - \cot B}$

(ix) $\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$

(x) $\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B$

(xi) $\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B$

7. कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात का विभिन्न चतुर्थांशों में विचरण

(Variation of Trigonometric Ratios of angles in Various Quadrants)

चतुर्थांश	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\operatorname{cosec} \theta$
प्रथम	+	+	+	+	+	+
द्वितीय	+	-	-	-	-	+
तृतीय	-	-	+	+	-	-
चतुर्थ	-	+	-	-	+	-

(xii) $\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \sin A \sin B$

(xiii) $\sin C + \sin D = 2 \sin \left(\frac{C+D}{2} \right) \cos \left(\frac{C-D}{2} \right)$

(xiv) $\sin C - \sin D = 2 \cos \left(\frac{C+D}{2} \right) \sin \left(\frac{C-D}{2} \right)$

(xv) $\cos C + \cos D = 2 \cos \left(\frac{C+D}{2} \right) \cos \left(\frac{C-D}{2} \right)$

(xvi) $\cos C - \cos D = 2 \sin \left(\frac{C+D}{2} \right) \sin \left(\frac{D-C}{2} \right)$

10. अपवर्त व अपवर्त्य कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात
(T-ratio of Double and Triple Angle)

(i) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

(ii) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$= 1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

(iii) $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

(iv) $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$